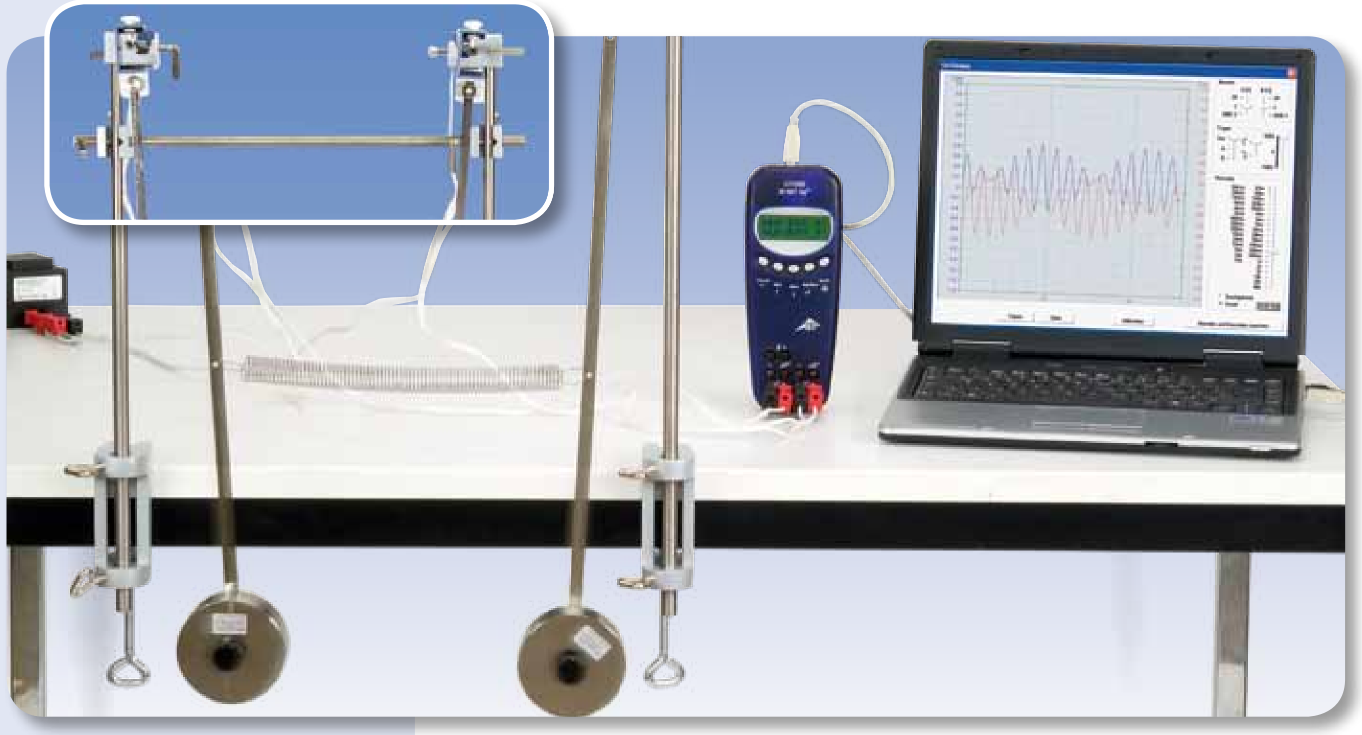
OSCILLAZIONI ACCOPPIATE

UE1050600



FUNZIONI

- Registrazione dell'oscillazione in fase e determinazione del suo periodo di oscillazione T_+.
- Registrazione dell'oscillazione in opposizione di fase e determinazione del suo periodo di oscillazione T_-.
- Registrazione di un'oscillazione accoppiata e determinazione del suo periodo di oscillazione T come pure del periodo di fluttuazione T_Δ.
- Confronto dei valori misurati con i valori calcolati dai periodi di oscillazione propria T_+ e T_-.

SCOPO

Registrazione e analisi delle oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati

RIASSUNTO

L'oscillazione di due pendoli uguali accoppiati è caratterizzata dal periodo di oscillazione e dal periodo di fluttuazione. A questo proposito, il periodo di fluttuazione è l'intervallo di tempo tra i due momenti in cui un pendolo oscilla di volta in volta con l'ampiezza minima. Entrambe le grandezze possono essere calcolate sulla base dei due periodi di oscillazione propria per l'oscillazione in fase e in opposizione di fase dei pendoli accoppiati.

APPARECCHI NECESSARI

Numero	Apparecchio	Cat. n°
2	Pendolo ad asta con rivelatore d'angolo (230 V, 50/60 Hz)	1000763
	Pendolo ad asta con rivelatore d'angolo (115 V, 50/60 Hz)	1000762
1	Molle ad elica 3,0 N/m	1002945
2	Morsetto da tavolo	1002832
2	Asta di supporto, 1000 mm	1002936
1	Asta di supporto, 470 mm	1002934
4	Manicotto universale	1002830
1	Cavo ad alta frequenza, connettore 4 mm / BNC	1002748
1	3B NET*log*™ (230 V, 50/60 Hz)	1000540
	3B NET*log*™ (115 V, 50/60 Hz)	1000539
	3B NET*lab*™	1000544

BASI GENERALI

Durante l'oscillazione di due pendoli accoppiati, l'energia di oscillazione viene trasferita alternativamente tra l'uno e l'altro. Se entrambi i pendoli sono uguali e se le loro oscillazioni vengono generate in modo che all'inizio un pendolo si trovi in posizione di riposo, mentre l'altro oscilli, il trasferimento di energia avviene addirittura completamente. Ciò significa che un pendolo si arresta completamente, mentre l'altro oscilla con la massima ampiezza. Il tempo tra due arresti di un pendolo o, più in generale, tra due momenti in cui il pendolo oscilla con l'ampiezza minima viene definito periodo di fluttuazione T_Δ.

Le oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati può essere descritta matematicamente come sovrapposizione di due oscillazioni proprie. Queste oscillazioni proprie sono osservabili se i due pendoli vengono sollecitati ad eseguire oscillazioni in fase o in opposizione di fase. Nel primo caso, i pendoli oscillano senza influsso dovuto all'accoppiamento, alla frequenza dei pendoli non accoppiati, mentre nel secondo caso oscillano sotto la massima influenza dell'accoppiamento alla massima frequenza propria. Tutte le altre oscillazioni possono essere rappresentate come sovrapposizioni di queste due oscillazioni proprie.

Le equazioni del moto dei pendoli hanno la forma:

(1)
$$L\cdot\varphi_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) = 0$$
$$L\cdot\varphi_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) = 0$$

g: Accelerazione di caduta, L: Lunghezza del pendolo,
k: Costante di accoppiamento

Scegliendo di introdurre le grandezze ausiliarie
$\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ e $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ si ottengono quindi le equazioni del moto:

(2)
$$L\cdot\varphi_+ + g\cdot\varphi_+ = 0$$
$$L\cdot\varphi_- + (g+2k)\cdot\varphi_- = 0$$

Le cui soluzioni

(3)
$$\varphi_+ = a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)$$

con le frequenze angolari

(4)
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}}$$

corrispondono alle oscillazioni proprie descritte per l'eccitazione in fase o in opposizione di fase (ossia $\varphi_+ = 0$ per l'oscillazione in opposizione di fase e $\varphi_- = 0$ per l'oscillazione in fase).

Le deviazioni dei pendoli possono essere calcolate sulla base della somma o della differenza delle due grandezze ausiliarie e si ottiene la soluzione

(5)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) + a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) - a_-\cdot\cos(\omega_- t) - b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

A questo proposito, i parametri a_+, a_-, b_+ e b_- sono inizialmente grandezze a piacere che possono essere calcolate sulla base dello stato di oscillazione dei due pendoli al momento $t = 0$.

Più facile da interpretare è il seguente caso che viene generato quando il pendolo 1 al momento 0 dalla posizione di origine ha una deviazione angolare iniziale ψ_0, mentre il pendolo 2 è a riposo nella posizione di origine.

(6)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

Per gli spostamenti dei due pendoli vale dunque quanto segue:

(7)
$$\varphi_1 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$$

Dopo la conversione matematica si ottiene

(8)
$$\varphi_1 = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$

con (9)
$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$$

Questo corrisponde ad un'oscillazione dei due pendoli alla stessa frequenza angolare ω, in cui le ampiezze di oscillazione ψ_1 e ψ_2 vengono modulate con frequenza angolare ω_Δ:

(10)
$$\psi_1(t) = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)$$
$$\psi_2(t) = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)$$

ANALISI

Da (4) è possibile calcolare i periodi T_+ e T_- dell'oscillazione propria in fase e in opposizione di fase:

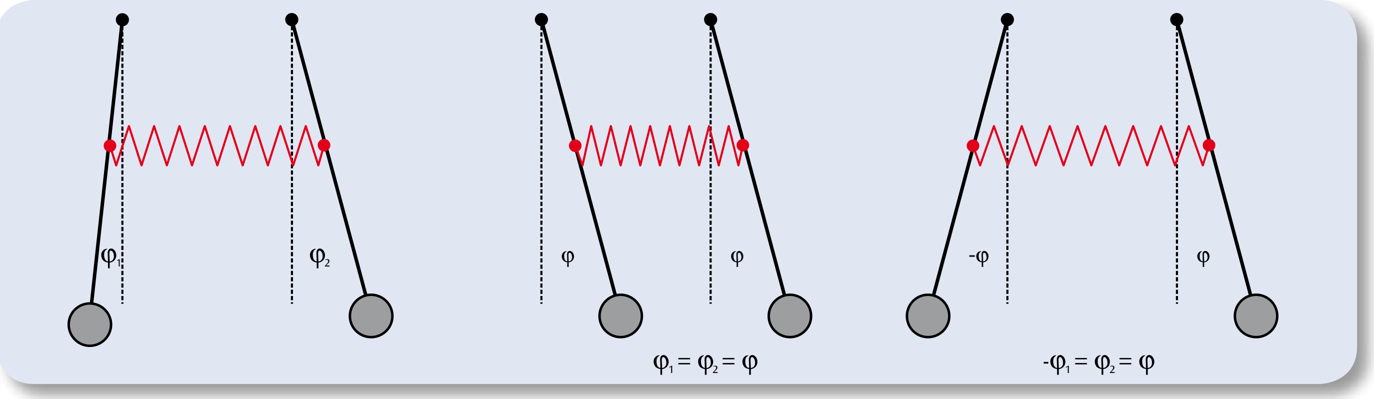
$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{e} \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Per il periodo T dell'oscillazione accoppiata vale secondo (9):

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-} \quad \text{e quindi} \quad T = 2\cdot\frac{T_+\cdot T_-}{T_- + T_+}$$

La modulazione dell'ampiezza descritta in (10) viene normalmente caratterizzata dal periodo di oscillazione T_Δ, vale a dire dal tempo tra due arresti dei pendoli:

$$\frac{2\pi}{2T_\Delta} = \omega_\Delta = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+} \quad \text{e quindi} \quad T_\Delta = \frac{T_+\cdot T_-}{T_+ - T_-}$$



Oscillazione generale accoppiata — Oscillazione in fase accoppiata — Oscillazione in opposizione di fase accoppiata