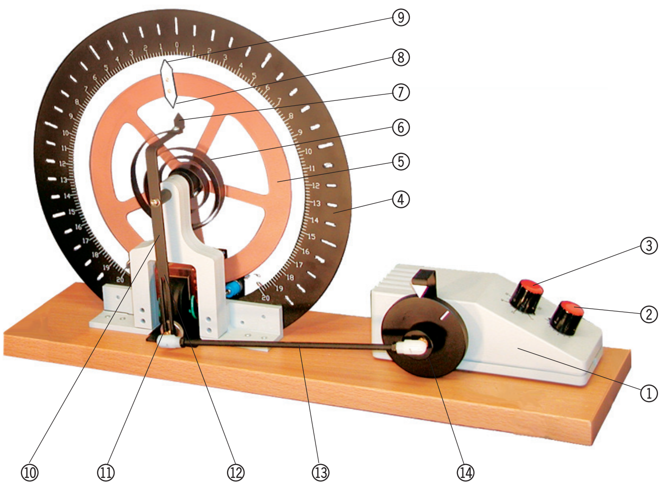
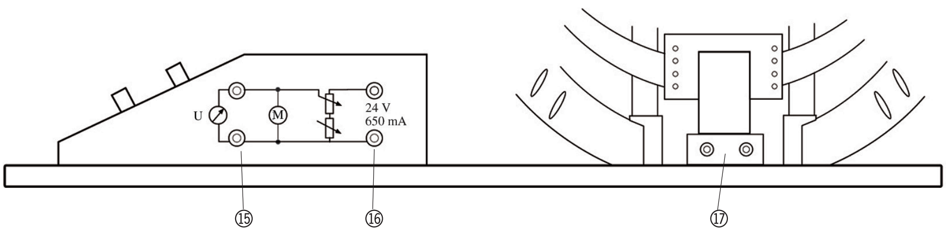
U15040 Pendolo di torsione del Prof. Pohl

Istruzioni per l’uso

12/03 ALF



① Motore ad eccitazione
② Manopola di microregolazione della tensione di eccitazione
③ Manopola di macroregolazione della tensione di eccitazione
④ Anello graduato:
⑤ Corpo del pendolo
⑥ Molle a spirale
⑦ Indicatore della posizione di fase dell’eccitatore
⑧ Indicatore della posizione di fase del corpo del pendolo
⑨ Indicatore per la deviazione del corpo del pendolo
⑩ Eccitatore
⑪ Freno a corrente di Foucault:
⑫ Fessura di guida e vite per la regolazione dell’ampiezza dell’eccitatore
⑬ Leva di trasmissione
⑭ Ruota motrice con eccentrico
⑮ Jack di sicurezza da 4 mm per la misurazione della tensione di eccitazione
⑯ Jack di sicurezza da 4 mm per l’alimentazione del motore ad eccitazione
⑰ Jack di sicurezza da 4 mm per l’alimentazione del freno a corrente di Foucault



Il pendolo di torsione serve per esaminare oscillazioni libere, forzate e caotiche con smorzamenti diversi.

Argomenti degli esperimenti:
- oscillazioni di torsione libere con smorzamenti diversi (oscillazione con smorzamento moderato, oscillazione aperiodica e caso limite aperiodico)
- oscillazioni forzate e relative curve di risonanza con smorzamenti diversi
- spostamento di fase tra eccitatore e risonatore in caso di risonanza
- oscillazioni di torsione caotiche
- determinazione statica della costante di collegamento D
- determinazione dinamica del momento d’inerzia J

1. Norme di sicurezza

- Durante l’estrazione dall’imballaggio, non afferrare il pendolo di torsione in corrispondenza dell’anello graduato! Rischio di danneggiamento! Durante l’estrazione utilizzare sempre l’opportuno ausilio (imballaggio interno)!
- Per trasportare il pendolo di torsione, tenere sempre l’apparecchio sulla piastra di base.
- Non superare la tensione di alimentazione max. ammessa del motore ad eccitazione (24 V CC).
- Non sottoporre il pendolo di torsione a sollecitazioni meccaniche non necessarie.

2. Descrizione, caratteristiche tecniche

Il pendolo di torsione del Prof. Pohl è composto da un sistema oscillante montato su una piastra di base in legno e da un motore elettrico. Il sistema oscillante si compone di una ruota di rame con cuscinetti a sfera (5), collegata all’asta di eccitazione tramite una molla a spirale (6), che fornisce il momento di richiamo. Per eccitare il pendolo di torsione è necessario un motore a corrente continua con velocità a regolazione fine e grossolana, che mediante un eccentrico (14) con leva di trasmissione (13) separa e comprime le molle a spi-

rale in sequenza periodica, mettendo in tal modo in moto la ruota di rame. Per lo smorzamento si utilizza un freno elettromagnetico a corrente di Foucault (11). Un anello graduato (4) con fessure e scala con divisioni da 2 mm circonda il sistema oscillante; sull'eccitatore e sul risonatore si trovano indicatori.
L'apparecchio può essere utilizzato anche nella dimostrazione della proiezione d'ombra.
Per l'alimentazione di corrente è necessario un alimentatore CC per pendolo di torsione U11755.

Frequenza propria:	ca. 0,5 Hz.
Frequenza di eccitazione:	da 0 a 1,3 Hz (regolabile di continuo)
Connessioni:	
Motore:	max. 24 V CC, 0,7 A, mediante jack di sicurezza da 4 mm
Freno a corrente di Foucault:	da 0 a 24 V CC, max. 2 A, mediante jack di sicurezza da 4 mm
Anello graduato:	300 mm Ø
Dimensioni:	400 mm x 140 mm x 270 mm
Peso:	4 kg

2.1 Fornitura

1 pendolo di torsione
2 masse supplementari da 10 g
2 masse supplementari da 20 g

3. Principi teorici

3.1 Simboli delle formule utilizzati

D	=	costante di collegamento angolare
J	=	momento di inerzia delle masse
M	=	momento torcente di richiamo
T	=	periodo
T_0	=	periodo del sistema non smorzato
T_d	=	periodo del sistema smorzato
$\widehat{M}_E$	=	ampiezza del momento torcente dell'eccitatore
b	=	momento di smorzamento
n	=	frequenza
t	=	tempo
Λ	=	decremento logaritmico
δ	=	costante di smorzamento
φ	=	angolo di deviazione
$\widehat{\varphi}_0$	=	ampiezza relativa al tempo t = 0 s
$\widehat{\varphi}_n$	=	ampiezza dopo n periodi
$\widehat{\varphi}_E$	=	ampiezza di eccitazione
$\widehat{\varphi}_S$	=	ampiezza del sistema
ω_0	=	frequenza propria del sistema oscillante
ω_d	=	frequenza propria del sistema smorzato
ω_E	=	frequenza del circuito di eccitazione
$\omega_{E\,res}$	=	frequenza del circuito di eccitazione per ampiezza max.
Ψ_{0S}	=	angolo di fase zero del sistema

3.2 Oscillazione di torsione armonica

Un'oscillazione armonica è presente se la forza di richiamo è proporzionale alla deviazione. In caso di oscillazioni di torsione armoniche il momento torcente di richiamo è proporzionale all'angolo di deviazione φ:

$$M = D \cdot \varphi$$

Il fattore di proporzionalità D (costante di collegamento angolare) può essere calcolato mediante misurazione dell'angolo di deviazione e del momento deviante.
La frequenza del circuito proprio del sistema ω_0 si ottiene dalla misurazione del periodo T

$$\omega_0 = 2\,\pi/T$$

e il momento di inerzia delle masse J da

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

3.3 Oscillazione di torsione smorzata libera

In un sistema oscillante, nel quale si verificano perdite di energia a causa di perdite per attriti, senza che l'energia venga compensata da energia apportata dall'esterno, l'ampiezza si riduce costantemente, ossia l'oscillazione è smorzata.
In ciò il momento di smorzamento b è proporzionale alla velocità angolare $\dot{\varphi}$.
Dall'equilibrio del momento torcente si ottiene l'equazione del moto

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Per l'oscillazione non smorzata, b = 0
Se inizia l'oscillazione relativa al tempo t = 0 s con l'ampiezza massima $\widehat{\varphi}_0$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale con uno smorzamento non troppo potente ($\delta^2 < \omega_0^2$) (oscillazione)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2\,J$ è la costante di smorzamento e

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

ω_d = frequenza propria del sistema smorzato.
In caso di smorzamento potente ($\delta^2 > \omega_0^2$) il sistema non oscilla ma scorre in posizione di riposo (scorrimento).
In caso di smorzamento non troppo potente, il periodo T_d del sistema oscillante smorzato cambia solo leggermente rispetto a T_0 del sistema oscillante non smorzato.
Inserendo $t = n \cdot T_d$ nell'equazione

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

e per l'ampiezza in base a n periodi $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ si ottiene con la definizione $\omega_d = 2\,\pi/T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta} \cdot T_d$$

e da ciò il decremento logaritmico Λ:

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0}\right] = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

Inserendo $\delta = \Lambda \;/\; T_\mathrm{d}$, $\omega_0 = 2\;\pi \;/\; T_0$ e $\omega_\mathrm{d} = 2\pi \;/\; T_\mathrm{d}$ nell'equazione

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

si ottiene:

$$T_\mathrm{d} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

dove il periodo T_d può essere calcolato con precisione, se è noto T_0.

3.4 Oscillazione di torsione forzata

In caso di oscillazioni di torsione forzate agisce dall'esterno un momento torcente variabile periodicamente con una funzione sinusoidale sul sistema oscillante. Questo momento di eccitazione deve essere integrato nell'equazione del moto.

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_\mathrm{E} \cdot sin(\omega_\mathrm{E} \cdot t)$$

Dopo un tempo di assestamento il pendolo di torsione oscilla in uno stato stazionario con la stessa frequenza del circuito dell'eccitatore, dove ω_E può essere ulteriormente spostato di fase verso ω_0. Ψ_{0S} è l'angolo di fase zero del sistema, lo spostamento di fase tra il sistema oscillante e l'eccitatore.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_\mathrm{S} \cdot \sin\,(\omega_\mathrm{E} \cdot t - \Psi_{0S})$$

Per l'ampiezza del sistema $\widehat{\varphi}_\mathrm{S}$ vale

$$\widehat{\varphi} = \frac{\frac{\widehat{M}_\mathrm{E}}{J}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{E}^2\right)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_\mathrm{E}^2}}$$

Per il rapporto tra l'ampiezza del sistema e l'ampiezza dell'eccitatore vale

$$\frac{\widehat{\varphi}_\mathrm{S}}{\widehat{\varphi}_\mathrm{E}} = \frac{\frac{\widehat{M}_\mathrm{E}}{J}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_\mathrm{E}}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_\mathrm{E}}{\omega_0}\right)^2}}$$

Con oscillazioni non smorzate aumenta l'ampiezza in caso di risonanza (ω_E uguale a ω_0) teoricamente all'infinito e viene determinata una "catastrofe di risonanza".

Con oscillazioni smorzate e uno smorzamento non troppo potente, l'ampiezza del sistema diventa massima, dove la frequenza del circuito dell'eccitatore $\omega_{E\,res}$ è inferiore rispetto alla frequenza del circuito proprio del sistema. Questa frequenza si ottiene da

$$\omega_\mathrm{Eres} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

In caso di smorzamento potente non si verifica alcun incremento di ampiezza.

Per l'angolo di fase zero del sistema Ψ_{0S} vale

$$\Psi_{0S} = arctan\left(\frac{2\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega_\omega^2}\right)$$

Per $\omega_E = \omega_0$ (risonanza) l'angolo di fase zero del sistema $\Psi_{0S} = 90°$. Ciò vale anche per $\delta = 0$ con relativa transizione.

Con oscillazioni smorzate ($\delta > 0$) e $\omega_E < \omega_0$ si ottiene $0° \leq \Psi_{0S} \leq 90°$, per $\omega_E > \omega_0$ vale $90° \leq \Psi_{0S} \leq 180°$.

Con oscillazioni non smorzate ($\delta = 0$) vale $\Psi_{0S} = 0°$ con $\omega_E < \omega_0$ e $\Psi_{0S} = 180°$ per $\omega_E > \omega_0$.

4. Comandi

4.1 Oscillazione di torsione smorzata libera

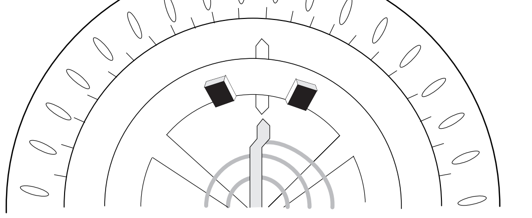
- Collegare il freno a corrente di Foucault con l'uscita per la tensione regolabile dell'alimentatore del pendolo di torsione.
- Attivare l'amperometro nel circuito elettrico.
- Determinare la costante di smorzamento in funzione della corrente.

4.2 Oscillazione di torsione forzata

- Collegare i jack di raccordo (16) del motore ad eccitazione con l'uscita di tensione fissa dell'alimentatore del pendolo di torsione.
- Collegare il voltmetro con i jack di raccordo (15) del motore ad eccitazione.
- Determinazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della frequenza dell'eccitatore o della tensione di alimentazione.
- Se necessario, collegare il freno a corrente di Foucault con l'uscita per la tensione regolabile dell'alimentatore del pendolo di torsione.

4.3 Oscillazioni caotiche

- Per la produzione di oscillazioni caotiche sono disponibili 4 masse supplementari, che modificano il momento di rovesciamento lineare del pendolo di torsione.
- A tale scopo avvitare la massa supplementare sul corpo del pendolo (5).



5. Esempi di esperimenti

5.1 Oscillazione di torsione smorzata libera

- Per la determinazione del decremento logaritmico Λ le ampiezze vengono misurate in più flussi e vengono determinati i valori medi. A tale scopo le deviazioni del pendolo di torsione sulla scala di volta in volta a sinistra e a destra vengono lette in due serie di misure.
- Il punto di partenza del corpo del pendolo era compreso tra 15 e –15 sulla scala. Sono state lette cinque deviazioni.
- Dal rapporto delle ampiezze si ricava Λ in base alla formula

$$\Lambda = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

n	$\widehat{\varphi}$ –				$\widehat{\varphi}$ +			
0	–15	–15	–15	–15	15	15	15	15
1	–14,8	–14,8	–14,8	–14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	–14,4	–14,6	–14,4	–14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	–14,2	–14,4	–14,0	–14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	–13,8	–14,0	–13,6	–14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	–13,6	–13,8	–13,4	–13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	Ø $\widehat{\varphi}$ –	Ø $\widehat{\varphi}$ +	Λ –	Λ +
0	–15	15		
1	–14,8	14,8	0,013	0,013
2	–14,5	14,5	0,02	0,02
3	–14,2	14,1	0,021	0,028
4	–13,8	13,8	0,028	0,022
5	–13,6	13,5	0,015	0,022

- Il valore medio per Λ ammonta a $\Lambda = 0{,}0202$.
- Per la durata dell'oscillazione T del pendolo vale $t = n \cdot T$. A tale scopo misurare il tempo per 10 oscillazioni con un cronometro e calcolare T.

  $T = 1{,}9$ s
- Da questi valori è possibile determinare la costante di smorzamento δ con $\delta = \Lambda / T$.

  $\delta = 0{,}0106\ s^{-1}$
- Per la frequenza propria ω vale

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$\omega = 3{,}307$ Hz

5.2 Oscillazione di torsione smorzata libera

- Per la determinazione della costante di smorzamento δ in funzione della corrente I mediante l'elettromagnete è stato eseguito lo stesso tentativo con il freno a corrente di Foucault inserito con I = 0,2 A, 0,4 A e 0,6 A.

I = 0,2 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–13,6	–13,8	–13,8	–13,6	–13,7	0,0906
2	–12,6	–12,8	–12,6	–12,4	–12,6	0,13
3	–11,4	–11,8	–11,6	–11,4	–11,5	0,0913
4	–10,4	–10,6	–10,4	–10,4	–10,5	0,0909
5	9,2	–9,6	–9,6	–9,6	–9,5	0,1

- Con T = 1,9 s e $\Lambda = 0{,}1006$ medio si ottiene la costante di smorzamento: $\delta = 0{,}053\ s^{-1}$

I = 0,4 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–11,8	–11,8	–11,6	–11,6	–11,7	0,248
2	–9,2	–9,0	–9,0	–9,2	–9,1	0,25
3	–7,2	–7,2	–7,0	–7,0	–7,1	0,248
4	–5,8	–5,6	–5,4	–5,2	–5,5	0,25
5	–4,2	–4,2	–4,0	–4,0	–4,1	0,29

- Con T = 1,9 s e $\Lambda = 0{,}257$ medio si ottiene la costante di smorzamento: $\delta = 0{,}135\ s^{-1}$

I = 0,6 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–9,2	–9,4	–9,2	–9,2	–9,3	0,478
2	–5,4	–5,2	–5,6	–5,8	–5,5	0,525
3	–3,2	–3,2	–3,2	–3,4	–3,3	0,51
4	–1,6	–1,8	–1,8	–1,8	–1,8	0,606
5	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	0,81

- Con T = 1,9 s e $\Lambda = 0{,}5858$ medio si ottiene la costante di smorzamento: $\delta = 0{,}308\ s^{-1}$

5.3 Oscillazione di torsione forzata

- Per la determinazione dell'ampiezza di oscillazione in funzione della frequenza di eccitazione o della tensione di alimentazione viene letta la deviazione massima del corpo del pendolo.

T = 1,9 s

Tensione motore V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- La frequenza del circuito proprio del sistema ω_0 si ottiene dalla misurazione del periodo T

  $\omega_0 = 2\,\pi/T = 3{,}3069$ Hz
- In caso di tensione del motore pari a 7,6 V ha luogo la deviazione massima, ossia si verifica la risonanza.
- Quindi è stato eseguito lo stesso tentativo con freno a corrente di Foucault inserito con I = 0,2 A, 0,4 A e 0,6 A.

I = 0,2 A

Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

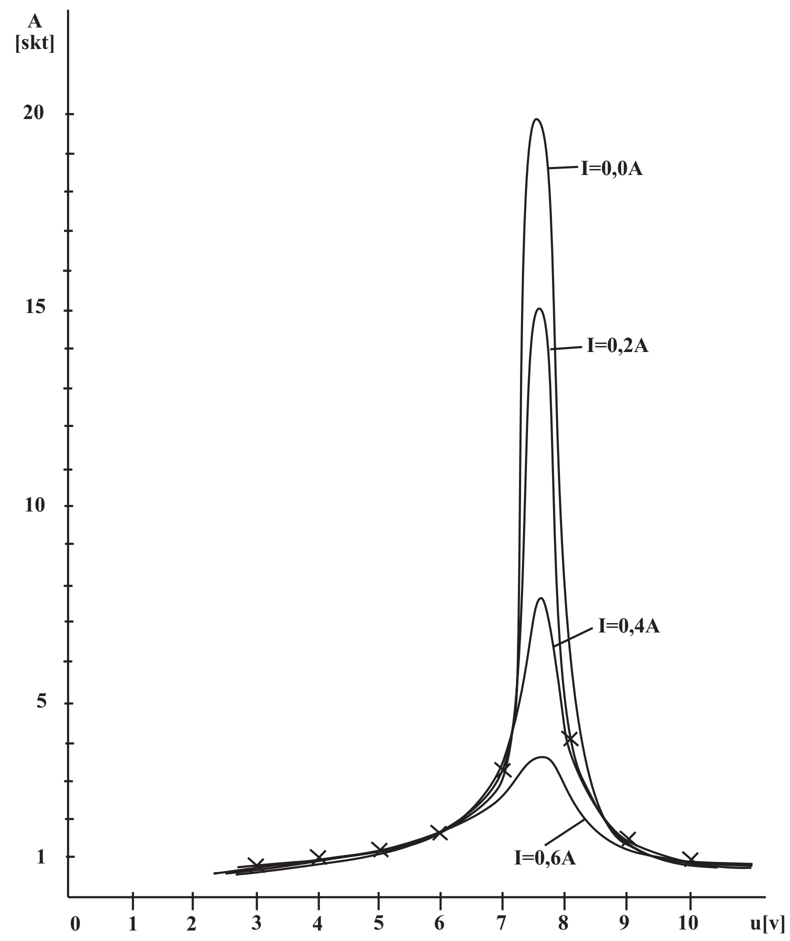
I = 0,4 A

Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

I = 0,6 A

Tensione motore V	$\hat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- Da queste misurazioni è possibile rappresentare graficamente le curve di risonanza, tracciando le ampiezze in funzione della tensione del motore.
- Dalla semilarghezza del grafo può essere determinata graficamente la frequenza della risonanza.



Curve di risonanza