

## Momento d'inerzia

### DETERMINAZIONE DEL MOMENTO D'INERZIA DI DIVERSI CORPI DI PROVA

- Determinazione della costante di torsione  $D_r$  della molla di accoppiamento.
- Determinazione del momento d'inerzia  $J$  dell'asta senza pesi.
- Determinazione del momento d'inerzia  $J$  in funzione della distanza  $r$  dei pesi rispetto all'asse di rotazione.
- Determinazione del momento d'inerzia  $J$  per un disco di legno, una sfera di legno, un cilindro pieno e uno cavo.
- Conferma del teorema di Steiner.

UE1040205

07/15 UD



Fig. 1: Disposizione per la misurazione

### BASI GENERALI

L'inerzia di un corpo rigido rispetto ad una variazione del suo moto di rotazione intorno ad un asse fisso è indicata dal momento d'inerzia  $J$ . Esso dipende dalla distribuzione della massa nel corpo rispetto all'asse di rotazione ed è tanto maggiore quanto maggiori sono le distanze rispetto all'asse di rotazione.

In generale, il momento d'inerzia si definisce tramite l'integrale di volume:

$$(1) \quad J = \int_V r_s^2 \rho(r) \cdot dV$$

$r_s$ : Distanza dell'elemento di volume dall'asse di rotazione  
 $\rho(r)$ : Distribuzione della massa del corpo

Nel caso di un'asta sulla quale sono disposti simmetricamente due pesi con massa  $m$  ad una distanza  $r$  rispetto all'asse di rotazione, il momento d'inerzia è pari a:

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

$J_0$ : Momento d'inerzia dell'asta senza pesi  
 $J_m$ : Momento d'inerzia dei pesi

I diversi corpi di prova possono essere fissati sull'asse di torsione. Il periodo di oscillazione  $T$  vale:

$$(3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

$D_r$ : costante di torsione della molla a elica

Ossia il periodo di oscillazione  $T$  è tanto maggiore quanto maggiore è il momento d'inerzia  $J$ .

Da (3) si ottiene l'equazione per il momento d'inerzia:

$$(4) \quad J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La costante di torsione della molla a elica può essere definita con l'ausilio di un dinamometro a molla:

$$(5) \quad D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

$\alpha$ : Deviazione dalla posizione di equilibrio

## ELENCO DEGLI STRUMENTI

1 Asse di torsione	U20050	1008662
1 Fotocellula	U11365	1000563
1 Contatore digitale	U8533341	1001032/3
1 Piede a barilotto, 1000 g	U13265	1002834
1 Base di supporto, 3 gambe, 185 mm	U13271	1002836
1 Dinamometro di precisione 1 N	U20032	1003104
1 Kit provini per asse di torsione	U20051	1008663

## MONTAGGIO ED ESECUZIONE

- Eeguire la disposizione per la misurazione secondo Fig. 1. Montare l'asse di torsione sulla base di supporto e, con l'ausilio della livella e delle viti di livellamento, allinearla orizzontalmente.
- Collegare la fotocellula all'ingresso A del contatore digitale. Sul contatore digitale, impostare il selettore di modalità sul simbolo per la misurazione dei tempi periodici di un pendolo.

### Note:

- Approntare sempre l'allestimento sperimentale in modo tale che la molla di accoppiamento sia compressa e non allargata.
- All'inizio della procedura di oscillazione è consigliabile uno spostamento di  $180^\circ$  (max.  $360^\circ$ ).

### Determinazione della costante di collegamento angolare $D_r$ della molla di accoppiamento

- Appendere il dinamometro a molla all'asta del manubrio in sequenza a distanze di  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30$  cm dal centro dell'asse di rotazione e spostare di  $\alpha = 180^\circ = \pi$ . Verificare che il dinamometro sia sempre orientato perpendicolarmente all'asta del manubrio.
- Leggere sul dinamometro i valori della forza necessaria allo spostamento per le rispettive distanze. Annotare tutti i valori nella Tabella 1.

### Determinazione del momento d'inerzia $J_0$ dell'asta del manubrio senza pesi

- Spostare l'asta del manubrio di  $180^\circ$  senza fissarvi alcun peso e, con l'ausilio del contatore digitale, misurare la durata di un periodo di oscillazione  $T_0$ .

### Determinazione del momento d'inerzia $J$ in funzione della distanza $r$ dei pesi rispetto all'asse di rotazione

- Fissare sull'asta del manubrio i due pesi a distanze pari a  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30$  cm in posizione simmetrica a sinistra e a destra dal centro dell'asse di rotazione.
- Non toccare le viti sui pesi che premono gli arresti a sfere contro l'asta del manubrio; tali viti sono regolate in modo che i pesi possano essere spostati e che siano fissati per contrastare la forza centrifuga.
- Spostare l'asta del manubrio di  $180^\circ$  e, con l'ausilio del contatore digitale, misurare ogni volta la durata di un periodo di oscillazione  $T$  e registrare nella Tabella 2.

### Determinazione del momento d'inerzia $J$ per un disco di legno, una sfera di legno, un cilindro pieno e un cilindro cavo.

- Montare uno dopo l'altro i corpi di prova sull'asse di torsione. Per il cilindro pieno e il cilindro cavo utilizzare il piano di supporto.
- Per la misurazione della durata di un periodo di oscillazione, applicare in maniera adeguata una bandierina d'interruzione in carta sui corpi di prova.
- Ruotare consecutivamente il disco e la sfera di legno di  $180^\circ$  e misurare ogni volta la durata di un periodo di oscillazione. Registrare i valori in Tab. 3. Durante lo spostamento utilizzare i segni bianchi sui corpi di prova come punti di riferimento.
- Ruotare il piano di supporto di  $180^\circ$  e misurare la durata di un periodo di oscillazione. Registrare il valore in Tab. 3.
- Ruotare consecutivamente di  $180^\circ$  il cilindro pieno e il cilindro cavo sul piano di supporto e misurare ogni volta la durata di un periodo di oscillazione. Registrare i valori in Tab. 3. Durante lo spostamento utilizzare i segni bianchi sui corpi di prova come punti di riferimento.

### Conferma del teorema di Steiner

- Fissare il perno in sequenza nei fori con distanza  $a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$  e  $14$  cm dal centro del disco circolare.
- Montare il disco circolare per le diverse posizioni del perno sull'asse di torsione, ruotare di  $180^\circ$  e misurare la durata di un periodo di oscillazione. A tale scopo, applicare in maniera adeguata una bandierina in carta sul disco circolare. Registrare i valori in Tab. 4.

**ESEMPIO DI MISURAZIONE**

**Determinazione della costante di collegamento angolare  $D_r$  della molla di accoppiamento**

Tab. 1: Valori misurati per la forza  $F$  a una distanza  $r$  dal centro dell'asse di rotazione con uno spostamento statico dell'asta del manubrio di  $\alpha = 180^\circ = \pi$

$r / m$	$F / N$
0,05	1,72
0,10	0,86
0,15	0,58
0,20	0,46
0,25	0,32
0,30	0,26

**Determinazione del momento d'inerzia  $J_0$  dell'asta del manubrio senza pesi**

Durata di un periodo di oscillazione  $T_0$ : 2460 ms

**Determinazione del momento d'inerzia  $J$  in funzione della distanza  $r$  dei pesi rispetto all'asse di rotazione**

Tab. 2: Periodo  $T$  per l'oscillazione dell'asta del manubrio con pesi fissati a una distanza  $r$  sul manubrio stesso.

$r / m$	$T / ms$
0,05	2825
0,10	3663
0,15	4740
0,20	5926
0,25	7170
0,30	8440

**Determinazione del momento d'inerzia  $J$  per un disco di legno, una sfera di legno, un cilindro pieno e un cilindro cavo.**

Tab. 3: Periodo  $T$  per l'oscillazione di diversi corpi di prova.

Corpo	$T / ms$
Provino	1800
Disco	1800
Sfera	1880
Piano di supporto	512
Cilindro pieno + piano di supporto	917
Cilindro cavo + piano di supporto	1171

**Conferma del teorema di Steiner**

Tab. 4: Periodo  $T$  per l'oscillazione del disco circolare intorno a diversi assi a una distanza  $a$  dal baricentro.

$a / cm$	$T / ms$
0	2922
2	2960
4	3121
6	3327
8	3622
10	3948
12	4359
14	4748

**ANALISI**

**Determinazione della costante di collegamento angolare  $D_r$  della molla di accoppiamento**

Da (5) consegue che:

$$(6) \quad F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r} \quad \text{con } C = \alpha \cdot D_r$$

- Riportare i valori misurati per le forze  $F$  dalla tabella 1 rispetto ai valori reciproci delle distanze  $1/r$  e adattare una retta ai punti misurati.

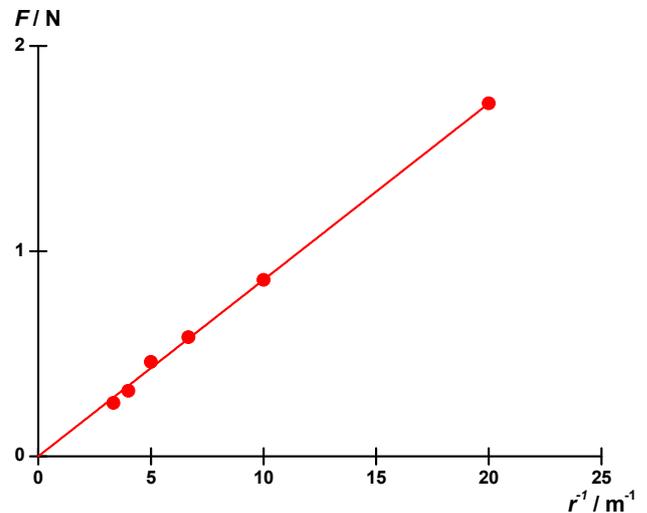


Fig. 2: Forza  $F$  in funzione del valore reciproco della distanza delle masse  $1/r$ .

In base all'incremento lineare  $C$  come da (6) determinare la costante di collegamento angolare  $D_r$ :

$$(7) \quad C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0,0860 \text{ Nm}}{\pi} = 0,0274 \text{ Nm}$$

**Determinazione del momento d'inerzia  $J_0$  dell'asta del manubrio senza pesi**

Per il momento d'inerzia dell'asta del manubrio senza pesi risulta da (4):

$$(8) \quad J_0 = 0,0274 \text{ Nm} \cdot \frac{(2,460 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

**Determinazione del momento d'inerzia  $J$  in funzione della distanza  $r$  dei pesi rispetto all'asse di rotazione**

- Determinare il momento d'inerzia  $J$  dell'asta del manubrio con pesi come da (4) partendo dai valori in Tab. 2 e registrare in Tab. 5.

- Determinare il momento d'inerzia  $J_m$  dei pesi come da

$$(9) \quad J_m = J - J_0$$

e registrare in Tab. 5.

Tab. 5: Periodo  $T$ , momento d'inerzia  $J$  dell'asta del manubrio con pesi e momento d'inerzia  $J_m$  dei pesi per diverse distanze  $r$  rispetto all'asse di rotazione.

$r / \text{m}$	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_m / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0,05	2,825	5,54	1,34
0,10	3,663	9,31	5,11
0,15	4,740	15,6	11,4
0,20	5,926	24,4	20,2
0,25	7,170	35,7	31,5
0,30	8,440	49,4	45m2

Secondo (2) vale:

$$(10) \quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Riportare i momenti di inerzia  $J_m$  dalla Tabella 5 rispetto ai quadrati delle distanze  $r^2$  e confermare la dipendenza lineare in (10) (Fig. 3).

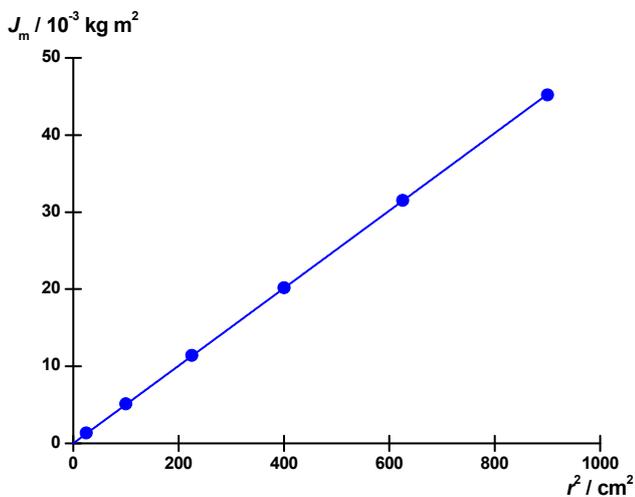


Fig. 3: Momento d'inerzia  $J_m$  dei pesi in relazione al quadrato della distanza delle masse  $r$ .

**Determinazione del momento d'inerzia  $J$  per un disco di**

**legno, una sfera di legno, un cilindro pieno e un cilindro cavo.**

- Determinare i momenti d'inerzia  $J$  per diversi corpi di prova come da (4) partendo dai valori in Tab. 3 e registrare i valori in Tab. 6.
- Per determinare i momenti d'inerzia del cilindro pieno e del cilindro cavo  $J_V$  e  $J_H$ , sottrarre ogni volta il momento d'inerzia del piano di supporto  $J_T$  dai valori dei momenti d'inerzia di cilindro pieno + piano di supporto e cilindro cavo + piano di supporto  $J_{VT}$  e  $J_{HT}$ :

$$(11) \quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned}$$

- Calcolare i momenti d'inerzia teorici  $J_{th}$  con l'ausilio dei dati in allegato, registrare in Tab. 6 e comparare con i valori determinati con la misurazione.

Tab. 6: Momenti d'inerzia  $J$  di diversi corpi di prova.

Provino	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_{th} / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Disco	1,800	2,25	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 2,57$
Sfera	1,880	2,45	$2/5 \cdot m \cdot r^2 = 2,54$
Piano di supporto	0,512	0,18	–
Cilindro pieno + Piano di supporto	0,917	0,58	–
Cilindro pieno	–	0,40	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 0,43$
Cilindro cavo + Piano di supporto	1,171	0,95	–
Cilindro cavo	–	0,77	$m \cdot r^2 = 0,86$

I valori determinati con la misurazione corrispondono a quelli calcolati in sede teorica.

**Conferma del teorema di Steiner**

- Determinare i momenti d'inerzia  $J_a$  per diversi corpi di prova  $a$  come da (4) partendo dai valori misurati in Tab. 4 e registrare i valori in Tab. 7.

Tab. 7: Momento d'inerzia  $J_a$  del disco circolare in oscillazione intorno a diversi assi a una distanza  $a$  dal baricentro.

$a / \text{cm}$	$T / \text{s}$	$J_a / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0	2,922	5,93
2	2,960	6,08
4	3,121	6,76
6	3,327	7,68
8	3,622	9,11
10	3,948	10,8
12	4,359	13,2
14	4,748	15,6

- In base al teorema di Steiner si ha:

$$(12) J_a = J_0 + m \cdot a^2 \text{ con } J_0 = J_a(a=0)$$

- Riportare  $J_a - J_0$  rispetto ad  $a^2$ , confermando la dipendenza lineare in (12) e dunque il teorema di Steiner (Fig. 4).

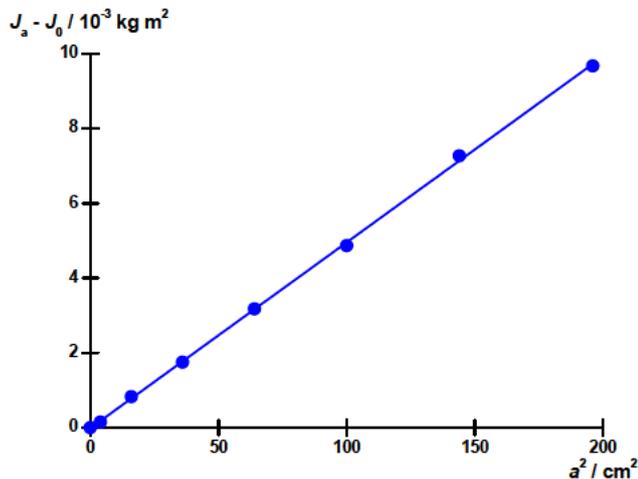


Fig. 4: Differenza dei momenti d'inerzia  $J_a - J_0$  del disco circolare in funzione della distanza  $a$  dell'asse di oscillazione dal baricentro.

## ALLEGATO: DATI TECNICI

### Asta

Lunghezza:	620 mm
Massa:	ca. 135 g
Pesi:	260 g ciascuno

### Disco circolare

Diametro:	320 mm
Massa:	ca. 495 g
Fori:	8
Distanza tra i fori:	20 mm

### Sfera di legno

Diametro:	146 mm
Massa:	ca. 1190 g

### Disco di legno

Diametro:	220 mm
Altezza:	15 mm
Massa:	ca. 425 g

### Piano di supporto

Diametro:	100 mm
Massa:	ca. 122 g

### Cilindro pieno (legno)

Diametro:	90 mm
Altezza:	90 mm
Massa:	ca. 425 g

### Cilindro cavo (metallico)

Diametro esterno:	90 mm
Altezza:	90 mm
Massa:	ca. 425 g