

Oscillazioni accoppiate

REGISTRAZIONE E ANALISI DELLE OSCILLAZIONI DI DUE PENDOLI UGUALI ACCOPPIATI.

- Registrazione dell'oscillazione in fase e determinazione del suo periodo di oscillazione T_+ .
- Registrazione dell'oscillazione in opposizione fase e determinazione del suo periodo di oscillazione T_- .
- Registrazione di un'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima e determinazione del suo periodo di oscillazione T come pure del periodo di fluttuazione T_Δ .
- Confronto dei periodi di fluttuazione e oscillazione misurati con i valori calcolati dai periodi di oscillazione propria T_+ e T_- .
- Determinazione degli indici di rigidità della molla di accoppiamento.

UE1050600

06/24 CW/UD

BASI GENERALI

Con l'oscillazione di due pendoli accoppiati, l'energia di oscillazione tra due pendoli viene trasferita alternatamente. Se entrambi i pendoli sono uguali e se le loro oscillazioni vengono generate in modo che all'inizio un pendolo si trovi in posizione di riposo, mentre l'altro oscilla con la massima deviazione, il trasferimento di energia avviene addirittura completamente. Ciò significa che un pendolo si arresta completamente, mentre l'altro oscilla con la massima ampiezza. Il tempo tra due arresti di un pendolo o, più in generale, tra due momenti in cui il pendolo oscilla con l'ampiezza minima viene definito come periodo di fluttuazione T_Δ .

Le oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati matematicamente possono essere descritte come sovrapposizione di due oscillazioni proprie. Queste oscillazioni proprie sono osservabili se i due pendoli vengono sollecitati ad eseguire oscillazioni in fase o in opposizione di fase.

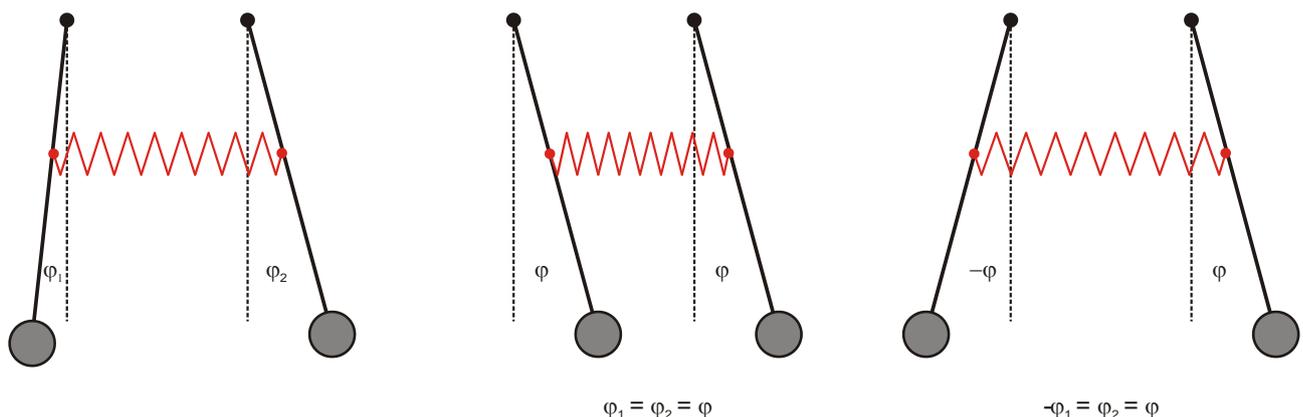
Nel primo caso, i pendoli oscillano senza influire sull'accoppiamento alla frequenza dei pendoli non accoppiati, mentre nel secondo caso oscillano esercitando la massima influenza sull'accoppiamento alla massima frequenza propria. Tutte le altre oscillazioni possono essere rappresentate come sovrapposizioni di queste due oscillazioni proprie.

Le equazioni del moto dei pendoli (per angoli di deviazione φ_1 e φ_2 ridotti) hanno la forma:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

g : accelerazione di caduta, L : lunghezza del pendolo, k : costante di accoppiamento

Fig. 1: A sinistra: oscillazione generale accoppiata, al centro: oscillazione in fase accoppiata, a destra: oscillazione in opposizione di fase accoppiata



La costante della molla di accoppiamento D varia in funzione della costante di accoppiamento k come indicato di seguito:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{2}$$

d : distanza del punto di fissaggio della molla di accoppiamento dalla sospensione del pendolo, m : Massa del pendolo

Per le grandezze ausiliarie (inizialmente introdotte volontariamente) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ e $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ si ottengono quindi le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

le cui soluzioni

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{4}$$

con le frequenze di circuito

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \tag{5}$$

e i periodi di oscillazione

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g + 2k}} \tag{6}$$

corrispondono alle oscillazioni proprie descritte per l'eccitazione in fase o in opposizione di fase (ossia $\varphi_+ = 0$ per l'oscillazione in opposizione di fase e $\varphi_- = 0$ per l'oscillazione in fase).

Le deviazioni dei pendoli possono essere calcolate sulla base della somma o della differenza delle due grandezze ausiliarie e si ottiene la soluzione:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{7}$$

A questo proposito, i parametri a_+ , a_- , b_+ e b_- sono inizialmente grandezze a piacere che possono essere calcolate sulla base dello stato di oscillazione dei due pendoli al momento $t = 0$.

Più facile da interpretare è il seguente caso che viene generato quando il pendolo 1 al momento 0 dalla posizione di origine viene deviato e rilasciato con l'angolo φ_0 , mentre il pendolo 2 è a riposo nella posizione di origine:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{8}$$

Dopo la conversione matematica si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

con

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad \omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \tag{10}$$

e

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-}, \quad T_\Delta = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{11}$$

Questo corrisponde ad un'oscillazione dei due pendoli alla stessa frequenza di circuito ω , in cui le ampiezze vengono modulate con la frequenza di circuito ω_Δ . Una tale modulazione è definita fluttuazione. In questo caso si può parlare persino di fluttuazione massima, perché il valore minimo raggiunto dall'ampiezza è zero.

Poiché la durata del periodo di fluttuazione T_Δ è solitamente intesa come il tempo tra due arresti dei pendoli, definiamo:

$$\omega_\Delta = \frac{2\pi}{2T_\Delta} \Leftrightarrow T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{12}$$

ELENCO DEGLI STRUMENTI

- 2 Pendoli ad asta con sensore angolare @230 V
1000763 (U8404275-230)
- o
- 2 Pendoli ad asta con sensore angolare @115 V
1000762 (U8404275-115)
- 1 Molla ad elica 3,9 N/m 1002945 (U15027)
- 2 Morsetti da tavolo 1002832 (U1326)
- 2 Aste di supporto 1000 mm 1002936 (U15004)
- 1 Asta di supporto 470 mm 1002934 (U15002)
- 4 Manicotti universali 1002830 (U13255)
- 2 Adattatori connettore BNC / jack 4 mm
1002750 (U11259)
- 2 Sensori di tensione 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
- 1 Data logger
- 1 Software

Ulteriori informazioni sulla misurazione digitale sono disponibili sul sito web del prodotto, nel webshop 3B.

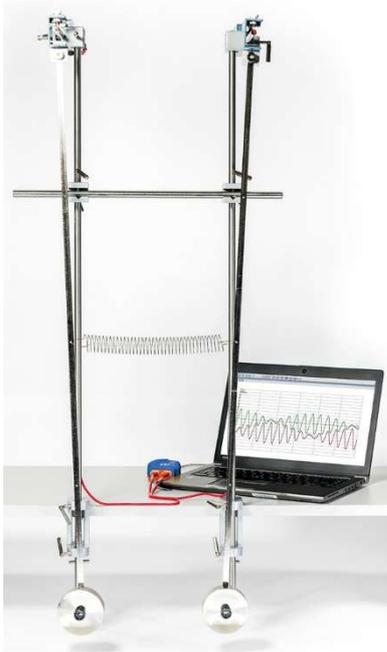


Fig. 2: Struttura di registrazione e analisi delle oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati

ESECUZIONE

- Avviare il software e registrare le curve temporali dei segnali di tensione di entrambi i sensori.
- 1. Registrazione dell'oscillazione in fase**
 - Spostare i due pendoli con la stessa angolazione (ridotta) e nella stessa direzione e rilasciarli contemporaneamente.
 - 2. Registrazione dell'oscillazione in opposizione di fase**
 - Spostare i due pendoli con la stessa angolazione (ridotta) e nella direzione opposta e rilasciarli contemporaneamente.
 - 3. Registrazione di un'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima**
 - Se necessario, aumentare il numero di valori misurati.
 - Spostare l'asta di un pendolo tenendo l'altra nella posizione di origine e rilasciarle contemporaneamente.

MONTAGGIO

La struttura è rappresentata nella fig. 2.

- Fissare le aste di supporto lunghe al tavolo di lavoro a circa 15 cm di distanza l'una dall'altra mediante i morsetti da tavolo.
- Applicare l'asta di supporto corta orizzontalmente per conferire maggiore stabilità alla struttura.
- Fissare i sensori angolari con i manicotti universali alle estremità superiori delle aste di supporto verticali.
- Bloccare i pesi dei pendoli all'estremità inferiore delle aste.
- Agganciare le aste dei pendoli ai sensori angolari (gli aghi della sospensione dei pendoli devono inserirsi negli incavi delle aste del sensore angolare).
- Agganciare la molla ad elica ai fori al centro di ogni asta del pendolo (a 50 cm dalle estremità).
- Collegare gli adattatori connettore BNC / jack 4 mm ai sensori angolari e collegare i sensori di tensione.
- Collegare i sensori di tensione al data logger.
- Collegare i due sensori angolari alla rete elettrica utilizzando gli alimentatori a spina.

ESEMPIO DI MISURAZIONE

1. Oscillazione in fase accoppiata

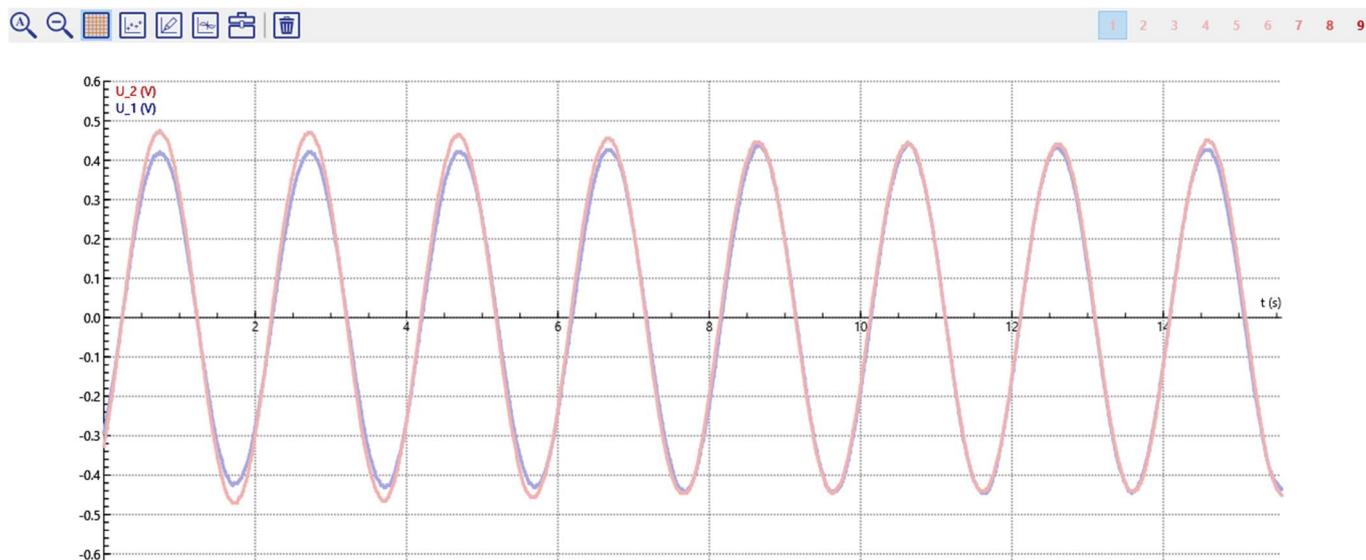


Fig. 3: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione in fase accoppiata

2. Oscillazione in opposizione di fase accoppiata

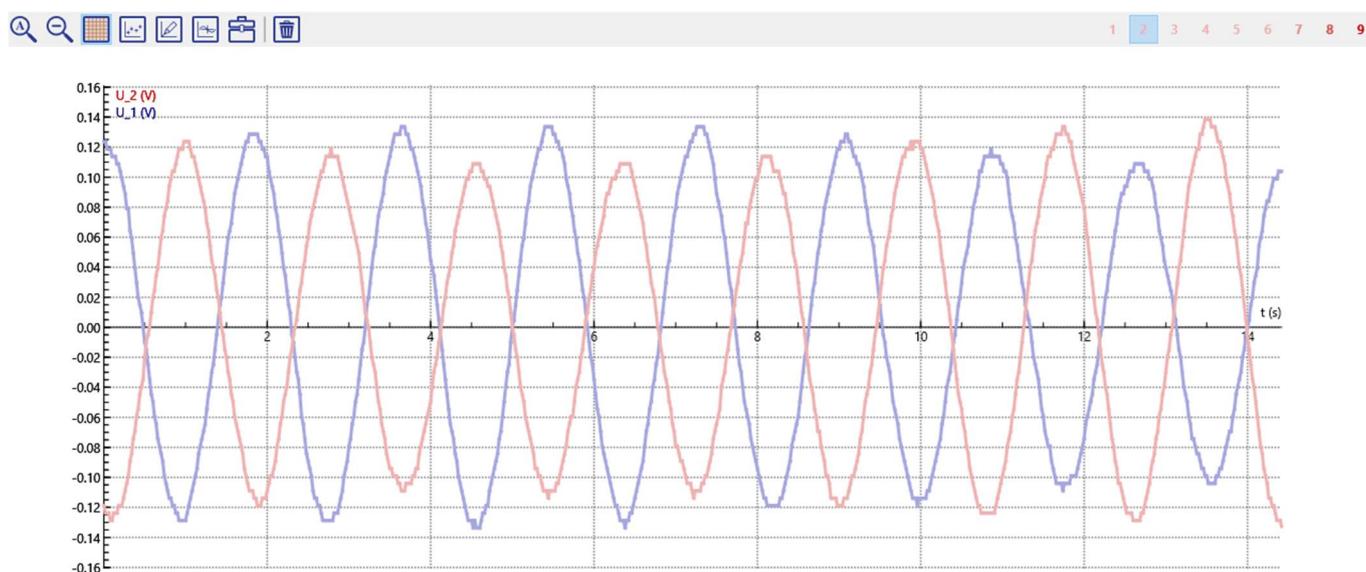


Fig. 4: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione in opposizione di fase accoppiata

3. Oscillazione accoppiata con fluttuazione massima

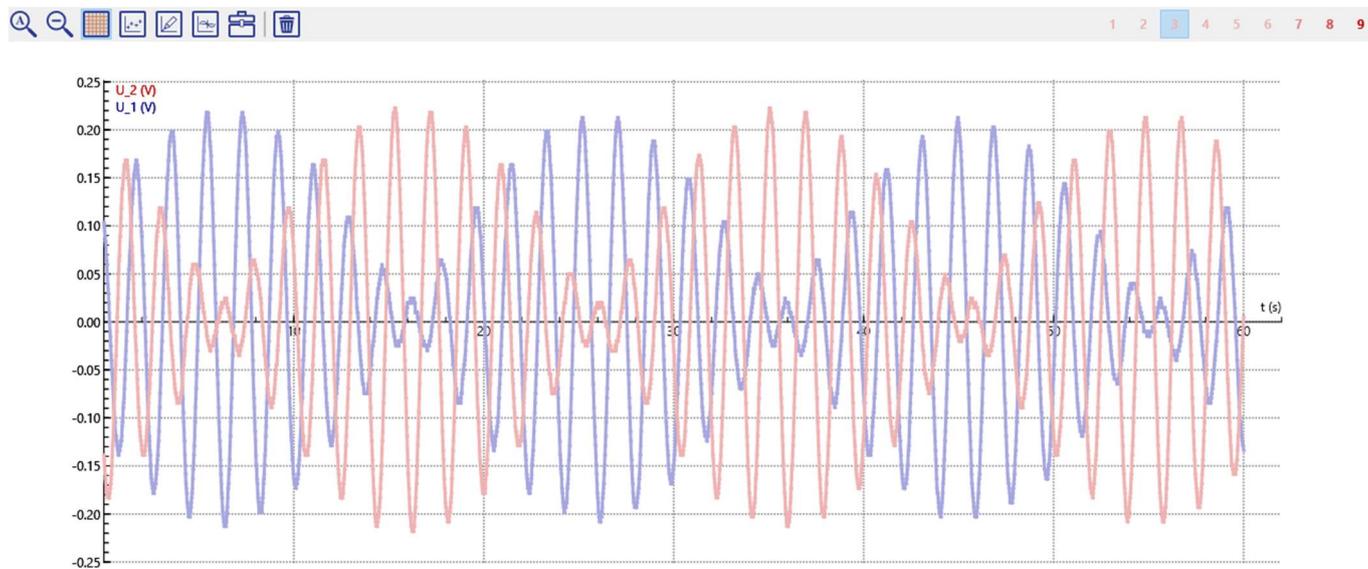


Fig. 5: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima

ANALISI

1. Determinazione del periodo di oscillazione in fase accoppiata

- Aprire il record dell'oscillazione in fase (Fig. 3).
- Con il cursore inserire nel diagramma il maggior numero di periodi di oscillazione di un pendolo, impostando entrambi i cursori esattamente sul passaggio attraverso zero di un fronte di salita, in modo da includere una serie intera di periodi.
- Leggere la distanza temporale del cursore.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T_+ = \frac{13,80 \text{ s}}{7} = 1,97 \text{ s.}$$

2. Determinazione del periodo di oscillazione in opposizione di fase accoppiata

- Aprire il record dell'oscillazione in opposizione di fase (Fig. 4) e procedere allo stesso modo.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T_- = \frac{12,50 \text{ s}}{7} = 1,79 \text{ s.}$$

3. Determinazione del periodo di oscillazione accoppiata con fluttuazione massima

- Aprire il record dell'oscillazione con fluttuazione massima (Fig. 5).
- Con il cursore inserire uno o, se possibile, più periodi di fluttuazione e leggere la distanza temporale del cursore.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi di fluttuazione inclusi fornisce il periodo di fluttuazione

$$T_{\Delta} = 19,72 \text{ s.}$$

- Modificare la scala dell'asse temporale in modo da visualizzare un periodo di fluttuazione ingrandito.
- Con il cursore, includere nel diagramma il maggior numero di periodi di oscillazione di un pendolo all'interno di un periodo di fluttuazione (tempo tra due arresti del pendolo in posizione di riposo) e leggere la distanza temporale del cursore.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T = \frac{19,72 \text{ s}}{11} = 1,79 \text{ s.}$$

4. Confronto con la teoria

Con la lunghezza del pendolo $L = 0,995 \text{ m}$ (distanza della massa del pendolo dalla sospensione del pendolo), la distanza del punto di attacco della molla di accoppiamento dalla sospensione del pendolo $d = 0,535 \text{ m}$, la massa del pendolo $m = 1 \text{ kg}$, la costante della molla di accoppiamento $D = 3,9 \text{ N/m}$ e l'accelerazione di caduta $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, le equazioni (2) e (6) danno come risultato

$$k = 1,122 \text{ m/s}^2$$

$$T_+ = 2,00 \text{ s}$$

$$T_- = 1,81 \text{ s}$$

I valori determinati sperimentalmente $T_+ = 1,97 \text{ s}$ e $T_- = 1,79 \text{ s}$ devono essere confrontati con questi valori. Sostituendo questi ultimi nelle equazioni (11) e (12) si ottiene

$$T = 1,88 \text{ s}$$

$$T_{\Delta} = 19,59 \text{ s}$$

I valori determinati sperimentalmente $T = 1,79 \text{ s}$ e $T_{\Delta} = 19,72 \text{ s}$ devono essere confrontati con questi valori.

I valori determinati sperimentalmente concordano bene con la teoria in ogni caso, le deviazioni relative sono a una cifra percentuale e ammontano al massimo al 5%.

5. Determinazione della costante della molla di accoppiamento.

In caso di accoppiamento debole ($k \ll g$), la costante della molla di accoppiamento (2) influisce solo in minima parte sul periodo dell'oscillazione in fase, ma caratterizza fortemente il periodo di fluttuazione. Pertanto, per determinare la costante della molla occorre metterlo in rapporto con il periodo di fluttuazione, che si ottiene inserendo (5) in (10) e convertendolo in k .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (13)$$

A questo punto si formulano le frequenze di circuito attraverso i periodi di fluttuazione e li si inserisce in (2).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (14)$$

Il valore si discosta dal valore nominale di $3,9 \text{ N/m}$ del 8% circa.